Pauta evaluación prueba 1

1) [20 ptos.]

(a) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una Tautología.

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

(b) Determine el valor de verdad de la siguiente proposición. Luego niéguela.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x \cdot y \in \mathbb{Z}$$

(a)

$$\begin{aligned} & [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r] \\ & [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow [\sim (p \vee q) \vee r] \\ & [r \vee (\sim p \wedge \sim q)] \rightarrow [\sim (p \vee q) \vee r] \\ & \sim [r \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [\sim (p \vee q) \vee r] \\ & [\sim r \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)] \vee [\sim (p \vee q) \vee r] \\ & [\sim r \wedge (p \vee q)] \vee \sim (p \vee q) \vee r \\ & [(r \vee \sim r) \wedge [r \vee (p \vee q)]] \vee \sim (p \vee q) \\ & r \vee (p \vee q) \vee \sim (p \vee q) \\ & r \end{aligned}$$

(b)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x \cdot y \in \mathbb{Z}$$

La proposición es verdadera, ya que el $0 \in \mathbb{Z}$, y $x \cdot 0 = 0 \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La negación sería:

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x \cdot y \notin \mathbb{Z}$$

2) [20 ptos.]

- (a) Dado el siguiente circuito Booleano, encuentre su polinomio booleano, simplifíquelo al máximo, y dibuje un circuito más simple al inicial.

El polinomio booleano sería $\langle \{[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p) \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r) \rangle \wedge p$.
Ahora queremos reducirlo al máximo.

$$\begin{aligned} & \langle \{[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p) \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r) \rangle \wedge p \\ & \langle \{[(q \wedge (p \vee \sim p)) \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r) \rangle \wedge p \\ & \langle \{[q \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r) \rangle \wedge p \\ & \langle (r \wedge q) \vee (r \wedge r \wedge q) \vee (q \wedge r) \rangle \wedge p \\ & r \wedge q \wedge p \end{aligned}$$

El circuito Booleano asociado a ésta reducción sería:

3) [20 ptos.]

(a) Sea $A = \{x/ x \text{ es un número primo menor que } 15\}$, $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19\}$ y $C = \{1, 4, 5, 7, 9, 19\}$, determine si las siguientes proposiciones son Verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- i. $(\exists x \in A \cap B)(\forall y \in A \cap C) : x + 4 \geq y$
- ii. $(\forall x \in B \cup C)(\exists y \in A) : (y \text{ es divisor de } x)$
- iii. $(\forall x \in A \cap (B \cup C))(\forall y \in A) : x \cdot y \text{ es impar}$
- iv. $(\exists x \in A \cup (B \cap C))(\exists y \in A) : (\frac{x}{y}) \in A$

Primero seria bueno escribir los conjuntos que involucran las proposiciones. Asi

$$A \cap B = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$A \cap C = \{5, 7\}$$

$$B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$B \cap C = \{5, 7, 9, 19\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19\}$$

Ahora veamos las proposiciones:

(i) $(\exists x \in A \cap B)(\forall y \in A \cap C) : x + 4 \geq y$

Esta proposición sería verdadera, ya que basta tomar cualquier elemento de $A \cap B$, por ejemplo el 3, y con esto se cumple que $3 + 4 \geq 5$ y $3 + 4 \geq 7$, por lo que se cumple para todo $y \in A \cap C$.

(ii) $(\forall x \in B \cup C)(\exists y \in A) : (y \text{ es divisor de } x)$

Esta proposición es falsa, ya que por ejemplo el 19 esta en $B \cup C$, y los divisores de 19 son solo el 1 y el 19, y ninguno de los dos esta en A.

(iii) $(\forall x \in A \cap (B \cup C))(\forall y \in A) : x \cdot y \text{ es impar}$

Esta proposición también es falsa, ya que el 2 pertenece al conjunto A, y $x \cdot 2$ es par, para todo $x \in A \cap (B \cup C)$

(iv) $(\exists x \in A \cup (B \cap C))(\exists y \in A) : (\frac{x}{y}) \in A$

Esta es verdadera ya que, existe el 9 en $A \cup (B \cap C)$, y el 3 en A, y se cumple que, $\frac{9}{3} = 3 \in A$